Prüfungshefte

MATHEMATIK

2024

# ABITUR GK

Hessen

Lernheft inklusive

- Abitur Original-Prüfungen (Grundkurs)
- Musterlösungen

# Inhalt

### Zentrale schriftliche Abiturprüfung

# Prüfungssimulation A

## Original-Prüfung 2021

**Hilfsmittel** Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, eine Liste der fachspezifischen Operatoren

**Hilfsmittel nicht für Aufgabenstellung 1:** Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist, wissenschaftlich-technischer Taschenrechner, der nicht programmierbar und nicht grafikfähig ist

**Bearbeitungszeit** 255 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

## Prüfungsteil 1 (45 Minuten)

### Aufgabenstellung 1

**Thema/Inhalt:** hilfsmittelfreier Teil

**Hinweis:** Aufgabenstellung 1 ist ein Pflichtvorschlag. Nach Ablauf der Bearbeitungszeit von Prüfungsteil 1 und dem anschließenden Zählen der Wörter geben Sie den Vorschlag und Ihre Bearbeitung ab. Anschließend werden die Aufgabenvorschläge für Prüfungsteil 2 sowie die zugelassenen Hilfsmittel bereitgestellt und die Bearbeitungszeit von Prüfungsteil 2 beginnt.

## Prüfungsteil 2 (210 Minuten)

### Aufgabenstellung 2

**Thema/Inhalt:** Analysis

**Hinweis:** Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

### Aufgabenstellung 3

**Thema/Inhalt:** Analytische Geometrie **oder** Stochastik

**Hinweis:** Bearbeiten Sie eine der Aufgaben.

*In der Original-Prüfung konnte die Lehrkraft eine der Stochastik Aufgabenvorschläge abwählen.*

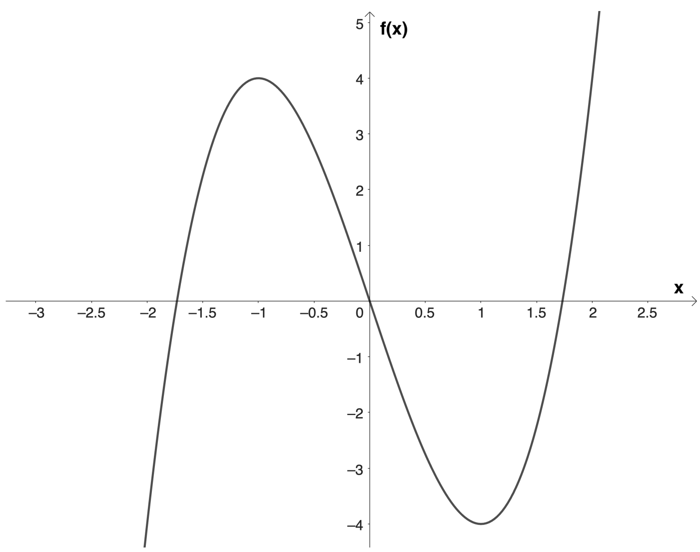
# 1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

**Analysis – Niveau 1**

1. Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = 2x^3 - 6x$. Der Graph von $f$ ist in der Abbildung im Material dargestellt.

    1.1. Berechnen Sie $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$ und begründen Sie mithilfe der Abbildung, warum der Wert dieses Integrals negativ ist. (4 BE)

    1.2. Geben Sie den Wert des Integrals $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx$ an. (1 BE)




**Lineare Algebra/Analytische Geometrie – Niveau 1**

2. Gegeben ist das Dreieck $ABC$ mit den Punkten $A(2|3|-4)$, $B(-1|1|0)$ und $C(2|1|-4)$.

    2.1. Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck im Punkt $C$ einen rechten Winkel hat.

    2.2. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dreiecksfläche.

**Stochastik – Niveau 1**

3. Feline besitzt eine Kiste mit den sechs gleichartigen Kugeln ① ❷ ❸ ④ ❺ ❻ und führt zwei verschiedene Experimente durch.

    3.1. Sie zieht zweimal hintereinander zufällig eine Kugel und legt jede Kugel nach dem Zug wieder zurück in die Kiste. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: Mindestens eine Kugel ist mit einer geraden Zahl beschriftet. (2 BE)

    3.2. Sie zieht dreimal hintereinander zufällig eine Kugel, ohne diese zurückzulegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: Unter den gezogenen Kugeln ist genau eine weiße Kugel. (3 BE)

**Stochastik – Niveau 2**

4. In einem Kindergarten mit 120 Kindern, darunter 68 Mädchen und 52 Jungen, befinden sich 14 Mädchen und 10 Jungen, die eine Brille tragen. Eine Umfrage unter den Eltern aller Kinder ergibt, dass bei 30 Kindern beide Elternteile eine Brille tragen. Unter diesen 30 Kindern tragen 8 eine Brille.

## 2.2 Analysis 2

**Aufgaben**

1. In einem Zoo wird ein Giraffenweibchen mit einer Körpergröße von $1,80$ Metern geboren. Die Wachstumsphase des Giraffenweibchens beginnt unmittelbar mit der Geburt und endet nach sechs Jahren. Die Funktion $g$ mit $g(t) = -2,5t^3 + 22,5t^2 - 60t + 90$ beschreibt im Intervall $0 \le t \le 6$ in sehr guter Näherung die Wachstumsgeschwindigkeit des Giraffenweibchens (in cm pro Jahr) in Abhängigkeit von der Zeit $t$ (in Jahren nach der Geburt). Der Graph von $g$ ist in Material 1 dargestellt.

   1.1. Berechnen Sie $g(0)$ und $g(6)$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser beiden Werte im Sachzusammenhang und beschriften Sie die Achsen in Material 1. (6 BE)

   1.2. Berechnen Sie zunächst ohne Beachtung des Sachkontexts die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von $g$. Hinweis: Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend. (5 BE)

   1.3. Erläutern Sie nun, warum die in Aufgabe 1.2 für $t$ berechneten Werte in Bezug auf die gesamte Wachstumsphase des Giraffenweibchens nicht diejenigen sind, an denen die Wachstumsgeschwindigkeit am größten bzw. am kleinsten ist. (2 BE)

   1.4. Berechnen Sie den Wert des Terms $\frac{1}{3}\int\limits_1^4 g(t)\,\mathrm{d}t$. Deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (6 BE)

   1.5. Für $0 \le t \le 6$ stellt die Funktion $G$ die Größe des Giraffenweibchens (in cm) in Abhängigkeit von der Zeit $t$ (in Jahren nach der Geburt) dar. Geben Sie eine Funktionsgleichung von $G$ an und erläutern Sie die Bedeutung des Wertes von $G$ zum Zeitpunkt $t = 0$. (3 BE)

   1.6. Begründen Sie mithilfe des Verlaufs des Graphen von $g$, dass der Graph der Funktion $G$ im betrachteten Intervall monoton steigend ist, und erklären Sie, wie viele Wendepunkte der Graph von $G$ besitzt. (3 BE)

2. In einem anderen Zoo wird zur selben Zeit wie das Weibchen in Aufgabe 1 ein Giraffenmännchen mit einer Körpergröße von $1,95$ Metern geboren. Das Weibchen wird $4,50$ Meter groß, das Männchen erreicht dagegen am Ende seiner sechsjährigen Wachstumsphase eine Größe von 6 Metern. Es wird angenommen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit des Männchens für $0 \le t \le 6$ durch eine Funktion der Schar $f_a$ mit $f_a(t) = a \cdot g(t)$ beschrieben wird, wobei der Parameter $a$ eine positive reelle Zahl ist.

   2.1. Erklären Sie den Einfluss des Parameters $a$ auf den Verlauf des Graphen von $f_a$ und beschreiben Sie, was $a > 1$ in Bezug auf das Wachstum des Giraffenmännchens bedeutet. (3 BE)

   2.2. Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters $a$ auf die jeweilige Lage des Wendepunktes der Graphen der Schar $f_a$. (3 BE)

   2.3. Erläutern Sie die Ergebnisse der Berechnungen in Zeile (1) und (2) im Sachzusammenhang. Zeigen Sie mithilfe des folgenden Kastens, dass $a = 1,5$ gelten muss. Geben Sie an, um wieviel Prozent die Wachstumsgeschwindigkeit des Männchens größer ist als die des Weibchens. (5 BE)

$$(1)\quad \int_0^6 a \cdot g(t)\,\mathrm{d}t = 600 - 195 = 405$$

$$(2)\quad \int_0^6 g(t)\,\mathrm{d}t = 450 - 180 = 270$$

$$(3)\quad \text{Es gilt: } \int_0^6 a \cdot g(t)\,\mathrm{d}t = a \cdot \int_0^6 g(t)\,\mathrm{d}t$$

# Abitur 2021 (Musterlösungen)

## 1 Hilfsmittelfreier Teil

### Analysis - Niveau 1

**Aufgabe 1.1**

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 2x^3 - 6x\,\mathrm{d}x\\ &= \left[2\cdot\frac{1}{4}x^4 - 6\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^2\right]_0^2\\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot 2^4 - 3\cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)\\ &= 8 - 12 - 0 = \underline{\underline{-4}}\end{aligned}$$

Das Integral berechnet die Fläche zwischen dem Graphen von $f$ und der $x$-Achse im Intervall $[0;2]$. Wie wir im Material erkennen können, liegt der Graph in diesem Intervall und auch die Fläche zwischen diesem und der $x$-Achse größtenteils unterhalb der $x$-Achse. Daher ist auch das Ergebnis des Integrals negativ.

**Aufgabe 1.2**
Wir berechnen das Integral analog zu Aufgabe 1.1:

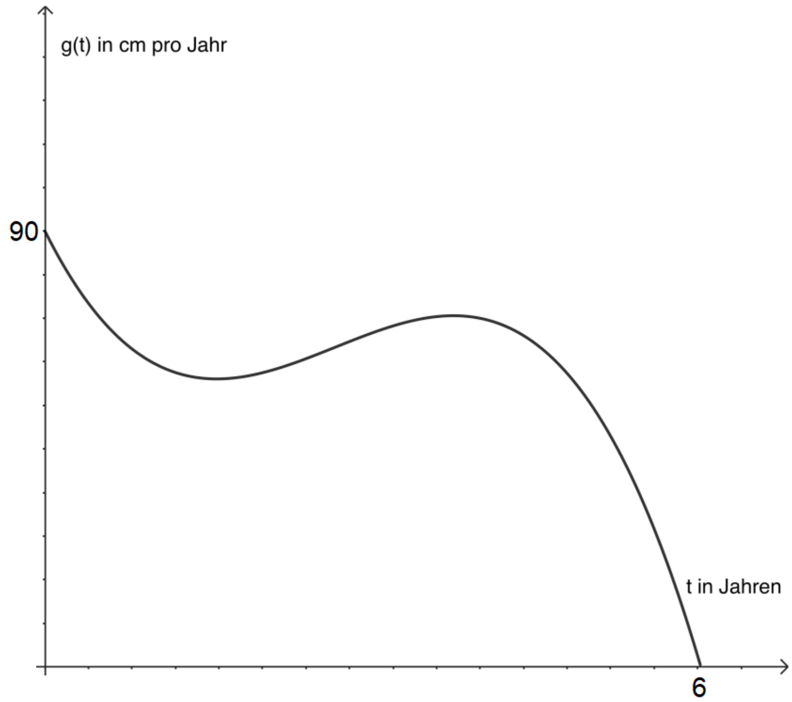
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{a} 2x^3 - 6x\,\mathrm{d}x\\ &= \left[2\cdot\frac{1}{4}x^4 - 6\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_{-a}^{a}\\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^2\right]_{-a}^{a}\\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot a^4 - 3\cdot a^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot(-a)^4 - 3\cdot(-a)^2\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot a^4 - 3\cdot a^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot a^4 - 3\cdot a^2\right)\\ &= \underline{\underline{0}}\end{aligned}$$

## 2.2 Analysis 2

**Aufgabe 1.1**

$$\begin{aligned} g(0) &= -2,5 \cdot 0^3 + 22,5 \cdot 0^2 - 60 \cdot 0 + 90 = \underline{90} \\ g(6) &= -2,5 \cdot 6^3 + 22,5 \cdot 6^2 - 60 \cdot 6 + 90 \\ &= -540 + 810 - 360 + 90 = \underline{0} \end{aligned}$$

Die Funktionswerte an den Stellen $t = 0$ und $t = 6$ beschreiben die Wachstumsgeschwindigkeit des Giraffenweibchens pro Jahr nach 0 und nach 6 Jahren. Im Jahr nach der Geburt wächst die Giraffe also um ca. 90cm, während sie nach 6 Jahren ausgewachsen ist (Ende der Wachstumsphase).




**Aufgabe 1.2**
Die notwendige Bedingung für die Extrempunkte des Graphen $g$ ist, dass die erste Ableitung von $g$ an den entsprechenden Stellen gleich null ist.

$$\begin{aligned} g'(t) &= -7,5t^2 + 45t - 60 = 0 && |:(-7,5) \\ \Rightarrow t^2 - 6t + 8 &= 0 && |\text{pq-Formel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t_{1/2} &= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 8} \\ &= 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 \\ \Rightarrow t_1 &= 2 \quad \wedge \quad t_2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(2) &= -2,5 \cdot 2^3 + 22,5 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 + 90 \\ &= -20 + 90 - 120 + 90 = 40 \\ g(4) &= -2,5 \cdot 4^3 + 22,5 \cdot 4^2 - 60 \cdot 4 + 90 \\ &= -160 + 360 - 240 + 90 = 50 \end{aligned}$$

Die Extrempunkte des Graphen von $g$ liegen also bei $E_1(2|40)$ und $E_2(4|50)$.